KURZE AUSZÜGE

Baumechanik.

Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke. Die Elastizitätsgleichungen von Maxwell-Mohr (bezw. die Gleichungen Müller-Breslaus) oder der Satz von Menabrea von der kleinsten Formänderungsarbeit gestatten die Berechnung aller (stereo-) statisch unbestimmten, gelenkigen oder aus biegungssteifen Elementen bestehenden Tragsysteme. Die Wahl der Überzähligen unterliegt nach Zurückführung auf den statisch bestimmten Grundfall im allgemeinen keiner Beschränkung. Man kann auch Abhängige der Überzähligen bestimmen, wenn dadurch eine einfachere Lösung erreicht wird. So ist ein mit n gelenkigen Knotenpunkten statisch bestimmtes ebenes Fachwerk bei Berücksichtigung der Steifigkeit der Knotenpunkte $(3n-6)$ fach statisch unbestimmt. Mohr verwendet als Unbekannte die Knotendrehwinkel (d. h. die für einen Knoten konstanten Drehwinkel der Stabenden bei der Formänderung), wodurch es gelingt, das Problem mit der Auflösung von n linearen Gleichungen zu erledigen. Es ist dies ein Verfahren, das auch auf Rahmenberechnungen übertragen wurde[1]).

F. Bleich zeigt, daß es bei Rahmentragwerken durch Hinzufügen der Stabdrehwinkel (d. h. der Drehwinkel der Stabsehnen bei einer Deformation) als weiterer Unbekannten zu den vorhandenen Überzähligen, möglich wird, die Elastizitätsbedingungen in einer ähnlichen Form anzusetzen, wie dies beim durchlaufenden Balken mittels der Clapeyron'schen Gleichungen der Fall ist. (Der Viermomentensatz und seine Anwendung auf die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke, Der Eisenbau 1917, S. 46 bis 61; Die Berechnung statisch unbestimmter Tragwerke nach der Methode des Viermomentensatzes, Berlin 1918.)

Stoßen in einer Rahmenecke mehrere Stäbe zusammen, so kann man für je zwei derselben eine sog. „Kontinuitätsbedingung" aufstellen, die ausdrückt, daß es für jede Ecke nur einen Knotendrehwinkel gibt. Es entstehen Viermomentengleichungen, die die vier Endmomente der beiden Stäbe und die beiden Stabdrehwinkel enthalten. Die Viermomentengleichungen geben mit den zwei sog. „Winkelgleichungen", die für jeden geschlossenen Rahmen angesetzt werden und die Bedingung dafür sind, daß der Rahmen auch nach der Formänderung ein geschlossener bleibt, die notwendige Gleichungszahl zur Berechnung aller Unbekannten. — Bei einem geschlossenen Rahmen von n Seiten sind (da ein Stab festgehalten gedacht wird) $n-1$ Stabdrehwinkel und die drei Überzähligen als Unbekannte vorhanden, denen zur Bestimmung n Viermomentengleichungen und zwei Winkelgleichungen gegenüberstehen. Da man jeden Rahmen durch Hinzufügen von Stäben als einen geschlossenen betrachten kann, besteht allgemein bei jedem Rahmentragwerk (das ja nur aus einzelnen geschlossenen Rahmen zusammengesetzt sein kann), Gleichzahl von Unbekannten und Bestimmungsgleichungen.

Der Rechnungsgang ist der, daß aus dem Gleichungssystem zuerst die Stabdrehwinkel eliminiert werden, wonach so viel Gleichungen übrig bleiben als Überzählige da sind. Dann erst werden die Überzähligen ausgesucht, die Eckmomente durch sie dargestellt und die so gewonnenen Gleichungen aufgelöst. Man kann also die Auswahl der statisch unbestimmten Größen nach dem Aufstellen der Elastizitätsbedingungen und daher so treffen, daß die Rechenarbeit möglichst gering wird; dies führt Bleich als einen Hauptvorzug seines Verfahrens an.

Durch Benutzung von Hilfsgrößen, die der Differenz von Knotendrehwinkel und Stabdrehwinkel entsprechen, kann mitunter eine Vereinfachung erzielt werden[1]). Um die Gleichungszahl zu verringern, können auch Viermomentengleichungen Verwendung finden, bei denen Eckmomente von Zwischenpunkten und zugehörige Stabdrehwinkel ausgeschieden sind.

Das Verfahren besitzt den Vorteil, immer in der gleichen mechanischen Weise eine Lösung zu bieten. Wenn auch in manchen Fällen andere Methoden — z. B. bei Berechnung des eingespannten Stabzuges, die Anwendung des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit — bequemer werden, so kann dies die Bedeutung der Bleich'schen Untersuchungen keineswegs verringern.

Knickfestigkeit von Rahmen. In dem Aufsatz „Die Knickfestigkeit elastischer Stabverbindungen" (Der Eisenbau 1919, S. 27 bis 37, 71 bis 83, 117 bis 123 nnd 163 bis 172) knüpft Bleich an seine oben bezeichneten Arbeiten an und stellt die Viermomentengleichungen unter Berücksichtigung der biegenden Wirkung von Längskräften auf. Diese Gleichungen bilden in Verbindung mit den Gleichgewichtsbedingungen für jeden Stab und

[1]) Siehe W. Gehler, Die Ermittlung der Nebenspannungen eiserner Fachwerkbrücken und das praktische Rechnungsverfahren nach Mohr, Berlin 1910. Rahmenberechnung mittels der Drehwinkel, Festschrift, Otto Mohr zum achtzigsten Geburtstage, Berlin 1916, S. 83 bis 123.

[1]) Siehe das Mohrsche Verfahren der Berechnung der Nebenspannungen und weiters: A. Bendixsen, Die Methode der α-Gleichungen zur Berechnung von Rahmenkonstruktionen, Berlin 1914.

den früheren Winkelgleichungen das System der Knickgleichungen. Ein geschlossener Rahmen mit n Stäben besitzt jetzt nach Bleich an Unbekannten: n Knickmomente, n Stabdrehwinkel und zwei sog. Knickkräfte, so daß also die Zahl der Unbekannten mit der Zahl der Knickgleichungen bilanziert. Durch das Nullsetzen der Determinante der Knickgleichungen ergibt sich die Knickbedingung. Es werden mehrfach gestützte Stäbe, ein zweistieliger symmetrischer Rahmen, ein Stabzug in Kreisbogenform sowie ein geschlossenes Stabeck im Kreise nach dieser Methode untersucht.

Vereinfachung bei Berechnung statisch unbestimmter Systeme. Eine Vereinfachung in der Berechnung statisch unbestimmter Systeme wird bekanntlich durch Aufstellen von Elastizitätsgleichungen erzielt, bei denen nicht alle Unbekannten in allen Gleichungen vorkommen. Man kann die Elastizitätsbedingungen in der Müller-Breslauschen Form unter Heranziehung von Biegungslinien und Verschiebungsplänen stets so umformen, daß jede Gleichung nur eine Unbekannte enthält, ein Verfahren, das aber bei höherer statischer Unbestimmtheit umständlich wird. Durch Verknüpfung von Überzähligen zu neuen Unbekannten, sowie endlich auch durch Einführung von statisch unbestimmten Hauptsystemen können fallweise äußerst günstige Verhältnisse erreicht werden. Ein dem zweiten Verfahren in gewisser Hinsicht entsprechendes ist das der Belastungsumordnung (B. U. Verfahren) von W. L. Andrée, das bei Tragwerken mit wenigstens einer Symmetrieachse angewendet werden kann und bei dem eine Verknüpfung von Lastangriffen stattfindet. (Zur Berechnung statisch unbestimmter Systeme, das B. U. Verfahren, München u. Berlin 1919, vgl. a. Der Brückenbau 1915, Heft 5)[1]). Andrée zerlegt die Belastung in symmetrische und wie er sich ausdrückt, umgekehrt-symmetrische Teilbelastungen, die zusammen die ursprüngliche Belastung ergeben, bei denen aber einzeln, infolge des Ausscheidens von Überzähligen, die Rechnung einfacher durchzuführen ist. Sie kann hierbei natürlich nach irgend einer der bekannten Methoden vorgenommen werden. Sehr oft wird durch diesen Kunstgriff die Lösung außerordentlich erleichtert.

Knickung von Rahmenstäben. Der Einsturz des Hamburger Gasbehälters im Jahre 1909, dessen Ursache die nicht ausreichende Knickfestigkeit eines Rahmenstabes war, gab Veranlassung, die Knickfestigkeit von Rahmenstäben genauer zu untersuchen[1]). H. Müller-Breslau beschäftigte sich eingehend mit dieser Frage; seine Lösung ist aber nicht sehr durchsichtig[1]). Neuerdings hat Prof. K. Ljungberg (Stockholm) dieses für die Baupraxis wichtige Problem behandelt (Der Eisenbau, 1920, S. 243 bis 251. Ljungberg nimmt an, daß sich die Belastung auf beide Gurtstäbe je halb verteilt und sich die Querstäbe so verbiegen, daß in ihrer Mitte ein Wendepunkt, also das Biegungsmoment gleich null ist. Unter Berücksichtigung der Stetigkeit der für beide Gurtstäbe gleich angesetzten Biegungslinien bleiben noch als Unbekannte die Querkräfte inmitten der Querstäbe und ein Neigungswinkel der elastischen Linie eines Gurtstabes bestehen. Die notwendige Gleichungszahl wird daraus abgeleitet, daß der rechte Winkel beim Anschluß jeder Querverbindung an die Gurtung auch nach der Formänderung erhalten bleibt und aus der Symmetriebedingung, daß die elastische Linie des Gurtstabes in ihrer Mitte eine Tangente . besitzt, die parallel zur ursprünglichen Stabachse verläuft. Infolge der letzteren Voraussetzung muß sich die Rechnung auf Sonderfälle mit einer bestimmten Zahl von Querstäben beschränken. (Durch diese Annahme über die Form der Biegungslinie läuft man Gefahr, Knicklasten zu verlieren; richtig wäre es, die Ausbiegung am Ende des Gurtstabes gleich null zu setzen.) Das Unbestimmtwerden der Unbekannten stellt hiernach die Knickbedingung dar. Ljungberg überprüft seine Rechnungsergebnisse an dem Versuchsstab, der nach dem Hamburger Einsturz im Kgl. Materialprüfungsamt Berlin-Lichterfelde erprobt wurde. Die Übereinstimmung ist befriedigend. Jedoch ist auch jetzt das Problem der Knickfestigkeit von Rahmenstäben noch nicht als erledigt zu betrachten. 41

Ratzersdorfer.

Zur Berechnung des durchlaufenden Balkens will Farid Boulad durch den folgenden Satz einen bequemen Zugang gewinnen (Comtes rendus de l'acad. Paris, Bd. 159, 1914, S. 161—163). Es seien für einen Balken auf zwei Stützen x_1 und x_2 die vom linken Auflager gerechneten Abszissen zweier Punkte des Balkens, die links von sämtlichen Lasten liegen. Die Sehne, die diese Punkte in ihrer deformierten Lage verbindet, schneide die linke Auflagerkraft in A. Der Abstand der Lastresultierenden vom rechten Auflager sei c. Trägt man c als Ordinate (in der Lastrichtung) im Punkte x_2 auf, verbindet den so entstehenden Endpunkt mit dem Punkt x_1 (auf dem nicht deformierten Balken), so trifft die durch A gehende Parallele zu dieser Verbindungsgeraden die Abszissenachse in einem Punkte F, dessen Lage von c unabhängig ist, also sich nicht ändert, wenn die Lasten so bewegt werden, daß sie rechts von x_1 und x_2

[1]) In verschiedentlichen Aufsätzen von L. Herzka über Rahmenträger (Der Eisenbau 1915, Zeitschr. f. Betonbau 1915 u. 1916 wurde, wie auch Andrée angibt, das Verfahren der Belastungsumordnung ebenfalls verwendet.

[2]) Vgl. die bezüglichen Aufsätze in »Der Eisenbau« 1911.

[1]) H. Müller-Breslau, Die neueren Methoden der Festigkeitslehre und der Statik der Baukonstruktionen, Leipzig 1913, S 380 bis 415.

bleiben. Die Abszisse von F ist, wenn y_1 und y_2 die Durchbiegungen in x_1 und x_2 bezeichnen, gleich

$$\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{c}.$$

Der Beweis ergibt sich ohne weiters, durch Einsetzen der bekannten Ausdrücke für y_1 und y_2. In welcher Weise die Anwendung auf den durchlaufenden Träger geschieht, ist leicht einzusehen, weniger überzeugend ist der praktische Wert dieser Berechnungsweise. 42

Mises.

Praktische Analysis.

Einfache Berechnung der Logarithmen. Wenn der Praktiker wohl auch kaum jemals in die Lage kommen dürfte, einen Logarithmus selbst berechnen zu müssen, so mag es doch nicht uninteressant sein, ein Verfahren kennen zu lernen, das sich zufolge seiner Einfachheit dem Gedächtnis leicht einprägt. K. Kommerell beschreibt (im Archiv d. Mathem. u. Phys., Bd. 28, 1920, S. 137—145) die Berechnung von gemeinen (Briggschen) Logarithmen durch bloßes Quadrieren. Man darf annehmen, daß die Zahl a, deren log gesucht wird, einstellig ist, also zwischen 1 und 10 liegt. Dann quadriert man sie so oft, bildet also a^1, a^1, a^8 usw., bis das Resultat über 10 liegt. Sei dies beim α-ten Schritt der Fall, dann kürzt man dies Resultat durch 10 und quadriert weiter, bis man — jetzt beim β-ten Schritt, vom Anfang an gezählt — wieder über 10 hinauskommt usw. Der gesuchte Logarithmus ist

$$\log a = (1/2)^\alpha + (1/2)^\beta + (1/2)^\gamma + \ldots\ldots$$

Man braucht somit bloß die Potenzen von $1/2$ zu kennen, um $\log a$ durch Addition zu finden. Um fünf Dezimalstellen sicher zu haben, sind 20 Quadrierungen erforderlich, für drei Dezimalstellen genügen etwa 13. — Auch die Umkehrung, d. h. Aufsuchung der Grundzahl zu gegebenem Logarithmus, läßt sich im Anschluß an dieses hübsche Verfahren durchführen.

Fehlergrenze bei näherungsweiser Gleichungs-Auflösung. Sucht man die Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$ zu finden und hat man zu diesem Zwecke festgestellt, daß $f(a)$ und $f(b)$ verschiedenes Vorzeichen haben, so wird man als ersten, rohen Näherungswert für die Wurzel den Ausdruck

$$x = \frac{a f(b) - b f(a)}{b - a}$$

ansetzen. Dieses x liefert ja den Schnittpunkt der durch die Punkte $a, f(a)$ und $b, f(b)$ hindurchgehenden Sehne mit der Abszissenachse. Wird nun angenommen, daß $f(x)$ in dem durch a, b begrenzten Bereich in eine Taylorsche Reihe entwickelt werden kann, und mit M der größte Absolutwert der zweiten Ableitung $f''(x)$ bezeichnet, so ist, wie G. Milhaud in ganz einfacher Weise darlegt (Nouv. annales de mathém. Bd. 14, 1914, S. 13—15), der dabei begangene Fehler ε

$$\varepsilon \leq \frac{(b-a)^3 M}{8\,|f(b) - f(a)|}.$$

Diese Fehlergrenze kann in besonderen Fällen tatsächlich erreicht werden.

Neues Verfahren zur numerischen Integration. In Analogie zu dem sog. Ritzschen Verfahren will Al. Fischer (Physik. Zeitschr. Bd. 22, 1921, S. 26—28) gewöhnliche Differentialgleichungen in der Weise lösen, daß er sie durch einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten im Sinne der „Methode der kleinsten Quadrate" näherungsweise befriedigt. Sei etwa y als Funktion von x gesucht und mit $y', y'' \ldots\ldots$ die erste, zweite $\ldots\ldots$ Ableitung von y bezeichnet. Die vorgelegte Gleichung laute:

$$f(x, y, y', y'') = 0. \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Nun wähle man für y einen Ansatz, der die vorgeschriebenen Nebenbedingungen erfüllt und überdies eine Anzahl unbestimmter Koeffizienten enthält, z. B. ein Polynom n-ten Grades ($n > 2$):

$$y = a_0 + a_1 x + a^2 x_2 + \ldots . a_n x^n, \quad \ldots \quad (2)$$

wo etwa a_0, a_1, a_2 durch die Integrationsbedingungen festgelegt seien. Dann bestimme man die übrigen Koeffizienten a_3, a_4 $\ldots\ldots$ a_n so, daß man $y, y' \ldots\ldots$ aus (2) in (1) einsetzt, das Quadrat der so entstandenen Funktion von x integriert und dies Integral zu einem Minimum macht:

$$\int f^2\, dx = \text{min.} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Als Integrationsgrenzen in (3) müssen offenbar die Grenzen des Bereiches, in dem das Integral von (1) verlangt wird, gelten. — Der Gedanke kann vielleicht in besonderen Fällen nützlich werden; aus den völlig trivialen Beispielen, die der Verfasser gibt, kann man über die Anwendungsmöglichkeiten nichts ersehen. Mises. 42

Interpolation durch ganze rationale Funktionen. Tobin gibt in Nr. 238 des philosophical magazine (Bd. 40, 1920, S. 513 bis 515) eine direkte Lösung der Aufgabe, eine ganze rationale Funktion r-ten Grades $y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_r x^r$ zu bestimmen, die an $r + 1$ Stellen $x = 1, 2, \ldots, r + 1$ die gegebenen Werte $y_1, y_2, \ldots, y_{r+1}$ annimmt. Er vermeidet also den Umweg über die Lagrangesche oder Newtonsche Formel und bestimmt die Koeffizienten unmittelbar aus den Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} y_1 &= a_0 + a_1 + \ldots + a_r \\ y_2 &= a_0 + 2a_1 + \ldots + 2^r a_r \\ &\vdots \\ y_{r+1} &= a_0 + (r+1) a_1 + \ldots + (r+1)^r a_r. \end{aligned}$$

Multipliziert man die s-te dieser Gleichungen mit dem Binominalkoeffizienten